Économie bancaire et financière

Chapitre 2 : Mesure des taux d'intérêt

Olivier Loisel

ENSAE

Janvier – Mars 2024

But du chapitre

- La partie I du cours (chapitres 2-4) s'intéresse au **prix sur le marché des obligations**.

- Plus précisément, elle s'intéresse à une variable clef étroitement liée à ce prix : **le taux d'intérêt**.

- Ce chapitre (chapitre 2) a pour but principal de
  - **définir et mesurer** le taux d'intérêt selon le type d'obligation,
  - **comparer** le taux d'intérêt d'une obligation à son taux de rendement,
  - **distinguer** le taux d'intérêt réel du taux d'intérêt nominal.

Plan du chapitre

Taux actuariel

Choix entre deux options I

- On vous propose de choisir entre les deux options suivantes :
  - option A : recevoir 100 euros aujourd'hui ;
  - option B : recevoir 105 euros dans un an.

  Laquelle choisissez-vous ?

- La réponse dépend du **taux d'intérêt annuel** i auquel vous pouvez prêter ou emprunter.

- Si $i = 5\%$, alors vous pouvez :
  - choisir l'option A, prêter les 100 euros aujourd'hui, et récupérer $100(1+i) = 105$ euros dans un an au remboursement du prêt avec intérêts (ce qui est équivalent à choisir l'option B) ;
  - choisir l'option B, emprunter 100 euros aujourd'hui, et utiliser la totalité du montant qui vous sera versé dans un an pour rembourser votre emprunt avec intérêts (ce qui est équivalent à choisir l'option A) ;

  de sorte que vous êtes indifférent entre les deux options.

Choix entre deux options II

- Si $i > 5\%$, vous préférez l'option A, car
  - l'option A vous permet d'obtenir $100(1+i) > 105$ euros dans un an ;
  - l'option B vous permet d'obtenir $105/(1+i) < 100$ euros aujourd'hui.
- Si $i < 5\%$, vous préférez l'option B, pour une raison similaire.
- Plus généralement, si l'option A consiste à recevoir X_a euros aujourd'hui et l'option B X_b euros dans n années, et si le taux d'intérêt annuel (noté i) est constant durant ces n années, alors
  - l'option A est préférable si $(1+i)^n X_a > X_b$,
  - l'option B est préférable si $(1+i)^n X_a < X_b$,
  - les deux options se valent si $(1+i)^n X_a = X_b$.

Valeur actualisée

- On appelle **valeur actualisée** (VA) d'une valeur future (VF) dans n années le montant qu'on peut emprunter aujourd'hui et exactement rembourser (avec intérêts) avec VF dans n années :

$$VA = \frac{VF}{(1+i)^n}.$$

- Le concept de valeur actualisée est très utile car il permet de calculer **la valeur aujourd'hui d'un instrument de crédit** pour un certain taux d'intérêt comme la somme des valeurs actualisées de ses flux de paiement futurs.

- Il permet ainsi de **comparer la valeur de différents instruments de crédit** dont les flux de paiement sont répartis différemment dans le temps (**échéanciers** différents).

Quatre principaux instruments de crédit I

- Du point de vue des échéanciers de flux, il existe **quatre principaux instruments de crédit** :

1. **prêt simple** : l'emprunteur verse un seul montant, à la fin de la période de prêt.

   $\hookrightarrow$ Exemple : de nombreux instruments du marché monétaire.

2. **prêt à versements constants (ou à mensualités ou annuités constantes)** : l'emprunteur effectue une série de versements égaux à chaque période pendant la durée du prêt.

   $\hookrightarrow$ Exemples : de nombreux crédits à la consommation, crédits automobiles, crédits immobiliers.

Quatre principaux instruments de crédit II

3. **obligation classique** : l'emprunteur verse à chaque période un montant fixe (appelé **coupon**) jusqu'à la maturité de l'obligation, puis rembourse un montant (appelé **valeur faciale**) à la maturité de l'obligation.

   $\hookrightarrow$ Exemples : de nombreuses obligations privées et publiques.

4. **obligation zéro-coupon** : émise à un prix inférieur à sa valeur faciale, elle ne verse pas de coupons et est remboursée à échéance à sa valeur faciale.

   $\hookrightarrow$ Exemple : de nombreux bons du Trésor à court terme.

Taux actuariel I

- **Taux actuariel (ou rendement actuariel ou taux de rendement interne)** : taux d'intérêt qui égalise la valeur d'un instrument financier aujourd'hui et la valeur actualisée de ses flux de paiement futurs.

- Calculons le taux actuariel pour les quatre instruments de crédit.

1. **Prêt simple** : prêt à n périodes de X euros remboursable par un versement de $X+Y$ euros à l'échéance. Le taux actuariel i (par période) est défini par

$$X = \frac{X+Y}{(1+i)^n},$$

ce qui donne

$$i = \left(1 + \frac{Y}{X}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Taux actuariel II

2. **Prêt à versements constants** : prêt à n périodes de X euros remboursable par des versements de V euros chaque période jusqu'à l'échéance. Le taux actuariel i (par période) est défini implicitement et uniquement par

$$X = \sum_{k=1}^{n} \frac{V}{(1+i)^k} = \left[1 - (1+i)^{-n}\right] \frac{V}{i}.$$

- Les prêts aux particuliers (prêts à la consommation, prêts immobiliers) sont généralement des prêts à versements constants mensuels.

- La législation européenne impose que toute offre de prêt de ce type indique le **TAEG (taux annuel effectif global)**, défini comme

$$TAEG \equiv (1+i)^{12} - 1,$$

où i est le taux actuariel mensuel, à des fins de comparabilité de différentes offres de prêt.

Taux actuariel III

3. **Obligation classique** : obligation de prix P, maturité n périodes, coupons périodiques C, et valeur faciale F. Le taux actuariel i (par période) est défini implicitement et uniquement par

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1+i)^k} + \frac{F}{(1+i)^n} = \left[1 - (1+i)^{-n}\right] \frac{C}{i} + \frac{F}{(1+i)^n}.$$

- Le prix de l'obligation est une **fonction décroissante** du taux actuariel : plus le taux d'intérêt est élevé, plus la valeur actualisée des paiements futurs est faible.

- Dans le cas particulier d'une **obligation perpétuelle** ($n \to +\infty$), cela donne $i = C/P$ (exemple : les *British consols* émises par le Trésor britannique, dont la "perpétuité" a pris fin en 1914).

Taux actuariel pour une obligation classique

Taux actuariel pour une obligation classique de maturité 10 ans,
de coupons annuels $C = 100$ euros et de valeur faciale $F = 1000$ euros

Prix de l'obligation (euros)	Taux actuariel (%)
1 200	7,13
1 100	8,48
1 000	10
900	11,75
800	13,81

Source : Mishkin et al. (2010).

Taux actuariel IV

4. **Obligation zéro-coupon** : obligation de prix P, maturité n périodes, et valeur faciale F. Le taux actuariel i (par période) est défini par

$$P = \frac{F}{(1+i)^n},$$

ce qui donne

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1,$$

ce qui revient à un prêt simple.

Taux d'intérêt négatifs

- Pour une obligation zéro-coupon, on a $i > 0 \Leftrightarrow P < F$.

- Le cas $i < 0$ et $P > F$ peut sembler impossible : on paie aujourd'hui pour recevoir un montant plus faible dans le futur, alors qu'on pourrait détenir de la monnaie qui garde sa valeur dans le temps.

- Néanmoins, des taux d'intérêt (légèrement) négatifs sur les bons du Trésor à 6 mois ont été récemment observés :
  - au Japon en 1998,
  - aux États-Unis en 2008,
  - en Allemagne et en France en 2012.

- La raison en est que la détention (physique) de billets et pièces en grande quantité est plus coûteuse que celle (électronique) de bons du Trésor.

- Les taux d'intérêt peuvent donc être négatifs, mais pas très négatifs.

Taux de rendement

Taux de rendement

- Combien rapporte la détention pendant une seule période d'une obligation dont la maturité est de plusieurs périodes ?

- **Taux de rendement** R $\equiv$ (ce que rapporte la détention de l'obligation entre t et t+1 seulement $-$ ce qu'elle a coûté en t) / ce qu'elle a coûté en t :

$$R = \frac{C + P_{t+1} - P_t}{P_t} = i_c + g,$$

où $i_c \equiv C/P_t$ est appelé **taux d'intérêt apparent** et $g \equiv \frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$ **taux de gain en capital**.

- Une hausse non anticipée du taux d'intérêt fait baisser le taux de rendement et peut le rendre négatif, en faisant baisser le prix de l'obligation émise avant cette hausse.

Taux d'intérêt et taux de rendement

Effet d'une hausse permanente non anticipée du taux d'intérêt de 10% à 20% pour une obligation avec $C = 100$ euros (annuels) et $F = 1000$ euros

(1) Nombre d'années avant l'échéance lors de l'achat	(2) Taux d'intérêt apparent lors de l'achat (%)	(3) Prix d'achat (euros)	(4) Prix de revente* (euros)	(5) Taux de gain en capital (%)	(6) Taux de rendement (2 + 5) (%)
30	10	1 000	503	−49,7	−39,7
20	10	1 000	516	−48,4	−38,4
10	10	1 000	597	−40,3	−30,3
5	10	1 000	741	−25,9	−15,9
2	10	1 000	917	−8,3	+1,7
1	10	1 000	1 000	0	+10

Source : Mishkin et al. (2010).

Risques de taux d'intérêt et de réinvestissement

- Le prix des obligations à maturité éloignée réagit davantage aux changements permanents non anticipés de taux d'intérêt.
- Ceci tend à rendre le cours des obligations à long terme plus volatil que celui des obligations à plus court terme.
- Si l'on souhaite placer ses fonds pour une courte durée, un placement en obligations à long terme est plus risqué qu'un placement en obligations à court terme : on appelle ce risque le **risque de taux d'intérêt**.
- Si l'on souhaite placer ses fonds pour une longue durée, un placement en obligations à court terme évite le risque de taux d'intérêt mais présente le **risque de réinvestissement** : celui de devoir replacer ses fonds aux périodes futures à un taux d'intérêt encore inconnu.

Taux d'intérêt réel

Taux d'intérêt nominal et réel I

- Les taux d'intérêt considérés jusqu'à présent sont appelés **taux d'intérêt nominaux** car ils ne tiennent pas compte de l'inflation (l'augmentation du niveau général des prix).

- Soit $\mathcal{P}_t$ le niveau général des prix des biens de consommation à la date t et $\pi_t \equiv (\mathcal{P}_t - \mathcal{P}_{t-1})/\mathcal{P}_{t-1}$ le taux d'inflation à la date t.

- Si je fais à la date t un prêt simple de X euros d'une période au taux d'intérêt nominal i, je prête $X/\mathcal{P}_t$ biens et en récupère $(1+i)X/\mathcal{P}_{t+1}$ à la période suivante.

- Le **taux d'intérêt réel ex post** i_r^{ep} (celui qui tient compte de l'**inflation réalisée**) est donc défini par

$$1 + i_r^{ep} = \frac{(1+i)X}{\mathcal{P}_{t+1}} \frac{\mathcal{P}_t}{X} = \frac{(1+i)\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_{t+1}} = \frac{1+i}{1+\pi_{t+1}}.$$

Taux d'intérêt nominal et réel II

- Pour de faibles pourcentages, l'équation précédente s'approxime par

$$i_r^{ep} \simeq i - \pi_{t+1}.$$

- De la même façon, le **taux d'intérêt réel ex ante** i_r^{ea} (celui qui tient compte de l'**inflation anticipée**) s'approxime par

$$i_r^{ea} \simeq i - \pi_{t+1}^a,$$

  où π_{t+1}^a représente l'anticipation de π_{t+1} à la date t.

- Cette dernière équation est appelée **équation de Fisher**.

- Le taux d'intérêt réel (ex ante/ex post) est donc négatif dès lors que le taux d'inflation (anticipé/réalisé) excède le taux d'intérêt nominal.

Taux d'intérêt nominal et réel III

- Le taux d'intérêt réel ex ante est le taux d'intérêt qui reflète le mieux les incitations à emprunter ou à prêter.

- Taux d'intérêt nominal et réel n'évoluent pas toujours dans le même sens (par exemple dans les années 1970).

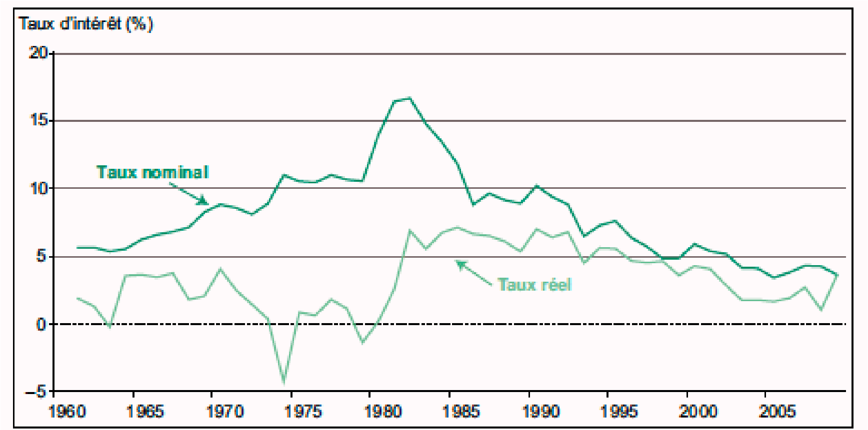
- Les États émettent aussi des obligations indexées sur l'inflation, dont les intérêts et le principal sont ajustés en fonction de la variation des prix :
  - les États-Unis depuis 1997,
  - la France depuis 1998 (indexation sur l'inflation française) et 2003 (indexation sur l'inflation de la zone euro).

Taux d'intérêt nominal et réel IV

- Le taux d'intérêt sur les obligations indexées est une **mesure du taux d'intérêt réel ex ante**.
- La différence de taux d'intérêt entre obligations non indexées et indexées de même échéance est une **mesure des anticipations par le marché du taux d'inflation** moyen jusqu'à l'échéance.
- Cette mesure d'anticipation d'inflation est appelée **point mort d'inflation** car elle correspond au niveau pour lequel les deux types d'obligation sont équivalentes.
- Cette mesure est très utile aux banques centrales dans la conduite de leur politique monétaire.

Taux d'intérêt nominal et réel ex post en France...

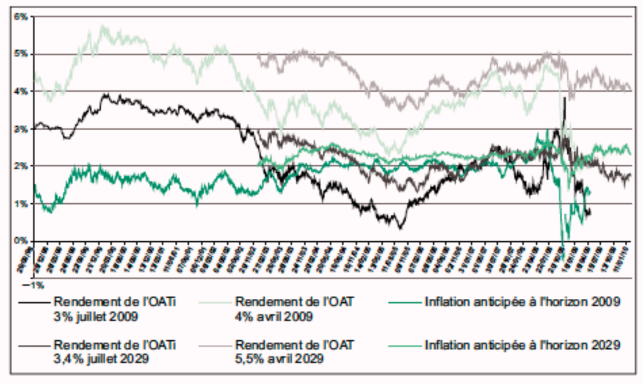
...sur les titres garantis par le gouvernement français, 1961-2009



Source : Mishkin et al. (2010).

Taux d'intérêt sur obligations indexées / non-indexées

Taux d'intérêt sur les obligations assimilables du Trésor français non indexées (OAT) et indexées (OATi) et anticipations d'inflation annuelle en résultant à l'horizon 2009 (1998-2009) et 2029 (2003-2010)



Source : Mishkin et al. (2010).

Taux d'intérêt net d'impôt

- Les intérêts obtenus sont imposables – par exemple, en France, au titre de :
  - l'impôt sur le revenu,
  - la contribution sociale généralisée (CSG),
  - la contribution pour le remboursement de la dette sociale (CRDS).

- Le taux d'intérêt le plus pertinent pour le prêteur est donc le **taux d'intérêt** réel **net d'impôt** $(1-\tau)i-\pi^a$, où τ est le taux d'imposition sur les intérêts.

- Le taux d'intérêt le plus pertinent pour l'emprunteur peut aussi être un taux d'intérêt réel net d'impôt.

- En effet, une entreprise endettée peut déduire de ses profits imposables les intérêts qu'elle paie sur sa dette : le taux d'intérêt le plus pertinent pour elle est donc $(1-\tau)i-\pi^a$, où τ représente le taux d'imposition sur ses profits.

- Pour un même taux d'intérêt réel brut, le taux d'intérêt réel net peut être très différent selon le taux d'intérêt nominal et l'inflation anticipée.